MATHÉMATIQUES - Cours & Fiches de révision

Chapitre 1 — Numération

1.1 Bases et systèmes de numération

Définition	La base d'un système de numération est le nombre de chiffres utilisés. En numération de position, la place d'un chiffre indique sa valeur (puissance de la base).

Un entier n en base b s'écrit : $n = a_p \times b^p + a_{p-1} \times b^{p-1} + \dots + a_1 \times b^1 + a_0 \times b^0$

Base	Nom	Chiffres	Usage
2	Binaire	0, 1	Électronique / informatique
10	Décimale	0–9	Usage courant
16	Hexadécimale	0–9, A–F	Couleurs, adresses mémoire

1.2 Conversions

Base b → base 10 (écriture polynomiale)

Exemple	$(1AE)_{16} = 1 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 14 \times 16^0 = 256 + 160 + 14 = 430$

Exemple	$(101101)_2 = 1 \times 32 + 0 \times 16 + 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 45$

Base 10 → base b (divisions euclidiennes successives)

On divise successivement par b et on lit les restes de bas en haut.

Exemple	77 ÷ 2 = 38 r 1 ∣ 38 ÷ 2 = 19 r 0 ∣ 19 ÷ 2 = 9 r 1 ∣ 9 ÷ 2 = 4 r 1 ∣ 4 ÷ 2 = 2 r 0 ∣ 2 ÷ 2 = 1 r 0 ∣ 1 ÷ 2 = 0 r 1 → $(77)_{10} = (1001101)_2$

Binaire ↔ Hexadécimal (groupes de 4 bits)

> 1 chiffre hexadécimal = exactement 4 bits. On groupe par 4 depuis la droite.

Exemple	$(1010\ 1111)_2$ → A = 1010, F = 1111 → $(AF)_{16}$

Déc	Bin	Hex		Déc	Bin	Hex
0	0000	0		8	1000	8
1	0001	1		9	1001	9
2	0010	2		10	1010	A
3	0011	3		11	1011	B
4	0100	4		12	1100	C
5	0101	5		13	1101	D
6	0110	6		14	1110	E
7	0111	7		15	1111	F

1.3 Calculs en binaire

Addition

Règles de base : 0+0=0 | 1+0=1 | 1+1=10 (retenue) | 1+1+1=11

Exemple	Exemple 1 :
	  1 1 0 1 (= 13)
	+ 0 1 1 0 (= 6)
	————————
	  1 0 0 1 1 (= 19)
	
	Exemple 2 :
	  1 0 1 1 0 1 (= 45)
	+ 0 0 1 1 0 1 (= 13)
	——————————
	  1 1 1 0 1 0 (= 58)

Soustraction

On soustrait bit à bit de droite à gauche. Si on soustrait 1 à 0, on emprunte 1 au rang supérieur (1 emprunté vaut 2 dans le rang courant).

Exemple	Exemple 1 :
	  1 1 0 1 (= 13)
	− 0 1 1 0 (= 6)
	————————
	  0 1 1 1 (= 7)
	
	Exemple 2 :
	  1 0 1 1 0 1 (= 45)
	− 0 0 1 1 0 1 (= 13)
	——————————
	  0 1 1 1 0 0 (= 28)
	
	Vérification possible : soustraire = additionner l'opposé → résultat identique.

Multiplication

On multiplie uniquement par 0 ou 1. Multiplier par 10_2 décale d'un rang (= ×2). Multiplier par 100_2 décale de deux rangs (= ×4), etc.

Exemple	Règles de base : a × 0 = 0 et a × 1 = a
	
	Exemple 1 :
	  1 1 0 1 (= 13)
	× 1 0 1 (= 5)
	——————————
	  1 1 0 1 (1101 × 1)
	  0 0 0 0 0 (1101 × 0, décalé 1 rang)
	  1 1 0 1 0 0 (1101 × 1, décalé 2 rangs)
	——————————
	  1 0 0 0 0 0 1 (= 65 car 13 × 5 = 65)
	
	Exemple 2 : 1 0 1 0 × 1 0 = 1 0 1 0 0 (= 20 car 10 × 2 = 20)

Chapitre 2 — Divisibilité & Division euclidienne

2.1 Divisibilité

Définition	a divise b (peut se noter a | b) s'il existe un entier k tel que b = k × a. On dit aussi que b est un multiple de a, ou que b est divisible par a.

Exemple	7 divise 35 car 35 = 5 × 7	6 divise 42 car 42 = 7 × 6

Propriété

- Si a divise b et b divise c, alors a divise c (transitivité)
- Si a divise b, alors a divise kb pour tout entier k (multiples d'un multiple)
- Si c divise a et c divise b, alors c divise (αa + βb) pour tous entiers α, β
- Dans ℕ* : si a divise b et b divise a, alors a = b

Exemple (propriété de combinaison) :

- 6 divise 42 et 6 divise 12 → 6 divise 42 + 12 = 54 et 6 divise 42 − 12 = 30
- En décomposant 1575 = 25×60 + 25×3 = 25×63, on voit que 25 divise 1575.

2.2 Critères de divisibilité

Diviseur	Critère
2	Chiffre des unités ∈ {0, 2, 4, 6, 8}
3	Somme des chiffres divisible par 3
4	Les deux derniers chiffres forment un nombre divisible par 4
5	Chiffre des unités = 0 ou 5
9	Somme des chiffres divisible par 9
10	Chiffre des unités = 0
11	Somme alternée des chiffres divisible par 11

Exemple	2310 : div. par 2 (unités=0), par 3 (2+3+1+0=6), par 5, par 10, par 11 (2-3+1-0=0)

2.3 Division euclidienne

Théorème	Pour tout entier a et tout entier b ≠ 0, il existe un unique couple (q, r) d'entiers tels que : a = b × q + r avec 0 ≤ r < |b| q est le quotient, r est le reste. Si r = 0, alors b | a.

Exemple	99 = 5 × 19 + 4 → q = 19, r = 4 133 = 32 × 4 + 5 → q = 4, r = 5

Tout entier pair s'écrit 2k, tout entier impair s'écrit 2k+1 (avec k ∈ ℤ).

Python — division euclidienne :

```
>>> 99 // 5     # quotient entier
19
>>> 99 % 5      # reste
4
>>> 273 % 13    # teste divisibilité (0 = divisible)
0
```

Chapitre 3 — Nombres premiers & PGCD

3.1 Nombres premiers

Définition — Un entier p ≥ 2 est premier s'il admet exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même. Un entier > 1 non premier est dit composé. 0 et 1 ne sont ni premiers ni composés.

Exemple — Premiers ≤ 30 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. 2 est le seul nombre premier pair.

Théorème — Si n est composé, il admet un diviseur premier p ≤ √n. → Pour tester si n est premier, on ne teste que les nombres premiers ≤ √n.

Exemple — Tester 271 : √271 ≈ 16,5 → on teste 2, 3, 5, 7, 11, 13. Aucun ne divise 271 → 271 est premier. Tester 471 : 4+7+1 = 12 (divisible par 3) → 471 = 3 × 157 → composé.

3.2 Crible d'Ératosthène

Méthode pour trouver tous les premiers ≤ N :

- Écrire tous les entiers de 2 à N
- Commencer par 2 : barrer tous ses multiples (4, 6, 8…)
- Passer au suivant non barré (3) : barrer ses multiples
- Répéter jusqu'à √N. Les non-barrés sont premiers.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Application en cryptographie : la difficulté de factoriser de grands entiers en produit de premiers garantit la sécurité des chiffrements.

3.3 Décomposition en facteurs premiers (DFP)

Théorème fondamental — Tout entier > 1 se décompose de façon unique en produit de facteurs premiers (à l'ordre des facteurs près).

Exemple — $90 = 2 \times 3^2 \times 5$ $\quad 1\,001 = 7 \times 11 \times 13$ $\quad 2\,100 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$

Méthode — Division successive (arbre de décomposition)

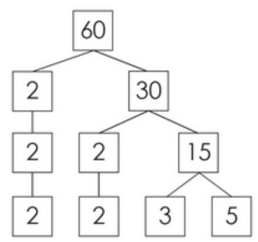
On divise successivement par les facteurs premiers (2, 3, 5, 7…) jusqu'à obtenir 1.

Exemple

Décomposer 360 :

$360 \div 2 = 180$
$180 \div 2 = 90$
$90 \div 2 = 45$
$45 \div 3 = 15$
$15 \div 3 = 5$
$5 \div 5 = 1$
→ $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

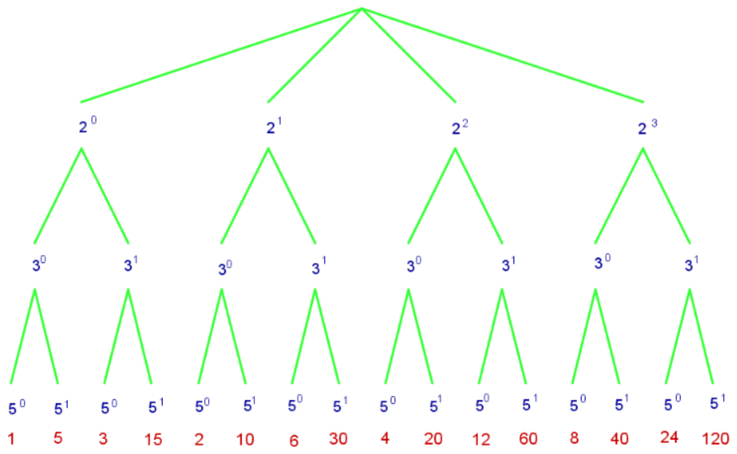
Décomposer 60 :



Arbre des diviseurs

On peut lister tous les diviseurs à partir de la DFP grâce à un arbre : on fait varier chaque exposant de 0 jusqu'à l'exposant maximum dans la décomposition.

Exemple : pour obtenir tous les diviseurs de 120 ($120=2^3\times3\times5$) :



> *Nombre de diviseurs de $N = p_1^{\alpha 1} \times p_2^{\alpha 2} \times \ldots$: on multiplie $(a_1+1)(a_2+1)$… Ex : $24 = 2^3\times3^1$ → $(3+1)(1+1) = 4\times2 = 8$ diviseurs | $18 = 2^1\times3^2$ → $(1+1)(2+1) = 2\times3 = 6$ diviseurs*

3.4 PGCD

Définition	Le PGCD(a, b) est le plus grand entier qui divise à la fois a et b. Notation alternative : $a \wedge b$

Méthode 1 — par la liste des diviseurs (si on la connaît)

On liste les diviseurs de chaque nombre, et on prend le plus grand commun aux deux listes.

Exemple	PGCD(24, 36) : Diviseurs de 24 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 Diviseurs de 36 : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 Diviseurs communs : 1, 2, 3, 4, 6, 12 → PGCD(24, 36) = 12

Méthode 2 — par la DFP

On décompose a et b en facteurs premiers, puis on prend les facteurs communs avec le plus petit exposant.

Exemple	$24 = 2^3 \times 3$ et $36 = 2^2 \times 3^2$ donc PGCD(24, 36) = $2^2 \times 3 = 12$

Méthode 3 — Algorithme d'Euclide

On effectue des divisions euclidiennes successives. Le PGCD est le dernier reste non nul.

Exemple	PGCD(1578, 534) : $534 = 510 \times 1 + 24$ $24 = 6 \times 4 + 0$	$1578 = 534 \times 2 + 510$ $510 = 24 \times 21 + 6$ → PGCD(1578, 534) = 6

3.5 Nombres premiers entre eux

Définition	a et b sont premiers entre eux (ou coprimes) si PGCD(a, b) = 1. Deux nombres premiers distincts sont toujours premiers entre eux.

Exemple	PGCD(18, 35) = 1 → 18 et 35 sont premiers entre eux

Chapitre 4 — Les matrices

4.1 Définitions

Définition	Une matrice de dimensions n × p est un tableau rectangulaire de n lignes et p colonnes. Le coefficient en ligne i, colonne j se note a_{i,j}. Si n = p : matrice carrée d'ordre n.

Matrices particulières :

- Matrice ligne (n=1) : M = [a_1 a_2 … a_p]
- Matrice colonne (p=1) : M = colonne de n coefficients
- Matrice nulle O : tous les coefficients valent 0
- Matrice identité I_n : coefficients diagonaux de 1, reste à 0 (carrée d'ordre n)

Matrice identité (ou matrice unité) I_3

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et matrice nulle O (2×3) :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.2 Opérations matricielles

Égalité

A = B ⟺ mêmes dimensions ET mêmes coefficients position par position.

Addition (et soustraction)

Règle	A + B est défini uniquement si A et B ont les mêmes dimensions $n \times$ p. La matrice somme des matrices A et B est la matrice notée $A + B = (c_{i,j})$ à n lignes et p colonnes telle que : $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Exemple	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 8 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 7 \\ 14 & 1 \end{pmatrix}$

Multiplication par un réel k

Règle	On définit la matrice kA comme la matrice obtenue en multipliant chaque coefficient de A par le réel k (la matrice doit avoir une dimension $n \times$ p et k doit être réel).

Exemple	$5 \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 20 & -15 \end{pmatrix}$

Produit de deux matrices

Règle	Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice à n lignes et p colonnes et $B = (b_{i,j})$ une matrice à p lignes et q colonnes. Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice notée $AB = (c_{i,j})$ à n lignes et q colonnes, définie par : $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{k=p} a_{i,k}a_{k,j} = a_{i,1}a_{1,j} + a_{i,2}a_{2,j} + \cdots + a_{i,p}a_{p,j}$ Pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant k \leqslant q$.

Exemple	On donne $A = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 20 & -15 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. $AB = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 20 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \times 1 + 5 \times (-1) & 10 \times 0 + 5 \times 4 \\ 20 \times 1 + (-15) \times (-1) & 20 \times 0 + (-15) \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 35 & -30 \end{pmatrix}$. $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 20 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 10 + 0 \times 20 & 1 \times 5 + 0 \times (-15) \\ -1 \times 10 + 4 \times 20 & -1 \times 5 + 4 \times (-15) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 70 & -65 \end{pmatrix}$.

⚠ Le produit matriciel N'EST PAS commutatif : AB ≠ BA en général. La division matricielle n'existe pas. A × I_n = I_n × A = A (la matrice identité est l'élément neutre du produit).

Chapitre 6 — Propositions logiques

6.1 Propositions

Définition	Une proposition est une affirmation à laquelle on peut attribuer une valeur de vérité unique : VRAI (V / 1 / True) ou FAUX (F / 0 / False). Principe du tiers exclu : il n'y a pas de troisième possibilité.

Exemple	✓ Propositions : « 9 est un carré parfait » (V) | « 1 < 0 » (F) | « La France est en Europe » (V) ✗ Non-propositions : « Il pleuvra demain » (incertain) | « x = 5 » (équation) | « 2022+1 » (terme)

Le 'ou' logique est inclusif (A ou B ou les deux). Ce n'est pas le 'ou' exclusif du langage courant (fromage ou dessert).

6.2 Connecteurs logiques

Négation ¬P (NON P)

Définition	¬P est vrai si et seulement si P est faux. L'opérateur est involutif : ¬(¬P) = P.

P	¬P
0	1
1	0

Exemple	¬(x ≤ 4) = x > 4 | ¬(« Toutes les Ferrari sont rouges ») = « Au moins une Ferrari n'est pas rouge »

Conjonction A ∧ B (ET)

Définition	A ∧ B est vrai si et seulement si A ET B sont toutes les deux vraies.

A	B	A ∧ B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Analogie électrique : montage en série (les deux interrupteurs doivent être fermés).

Disjonction A ∨ B (OU inclusif)

Définition	A ∨ B est faux si et seulement si A ET B sont toutes les deux fausses. Sinon, elle est vraie.

A	B	A ∨ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Analogie électrique : montage en parallèle (un seul interrupteur suffit).

Implication A ⇒ B

Définition	A ⇒ B est FAUSSE uniquement quand A est vraie ET B est fausse. Équivalent : A ⇒ B ⟺ ¬A ∨ B Vocabulaire : A est condition suffisante de B | B est condition nécessaire de A.

A	B	A ⇒ B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Exemple	Si ABC est équilatéral ⇒ ABC est isocèle (V) Si $x = -2 \Rightarrow x^2 = 4$ (V)

Réciproque & Contraposée	Réciproque de (A ⇒ B) : B ⇒ A (pas forcément vraie si A ⇒ B est vraie) Contraposée de (A ⇒ B) : ¬B ⇒ ¬A (toujours équivalente à A ⇒ B)

Exemple	Implication : « ABC rectangle en A ⇒ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ » Contraposée : « $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ ⇒ ABC non rectangle en A » Réciproque : « $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ⇒ ABC rectangle en A » (ici aussi vraie = Pythagore)

Équivalence A ⇔ B

Définition	A ⇔ B est vraie quand A et B ont la même valeur de vérité. A ⇔ B ≡ (A ⇒ B) ∧ (B ⇒ A)

A	B	A ⇔ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

6.3 Tautologie

Définition	Une tautologie est une proposition composée vraie pour toutes les valeurs de vérité possibles. La dernière colonne de sa table de vérité est entièrement à 1.

Exemple	P ∨ (¬P) est toujours VRAI (tiers exclu) P ∧ (¬P) est toujours FAUX (non-contradiction) ¬(¬P) ⇔ P est une tautologie

6.4 Lois de De Morgan

Théorème	¬(P ∧ Q) ⇔ (¬P) ∨ (¬Q) ¬(P ∨ Q) ⇔ (¬P) ∧ (¬Q) Règle mnémotechnique : la négation « entre » dans la parenthèse en changeant ∧ ↔ ∨.

Exemple	¬(« Il pleut » ∧ « Il vente ») ⇔ « Il ne pleut pas » ∨ « Il ne vente pas » ¬(age > 18 et age ≤ 25) ⇔ age ≤ 18 ou age > 25

6.5 Propriétés des connecteurs

Propriété	∧ (ET)	∨ (OU)
Commutativité	P ∧ Q ⇔ Q ∧ P	P ∨ Q ⇔ Q ∨ P
Associativité	P ∧ (Q ∧ R) ⇔ (P ∧ Q) ∧ R	P ∨ (Q ∨ R) ⇔ (P ∨ Q) ∨ R
Distributivité	P ∧ (Q ∨ R) ⇔ (P∧Q) ∨ (P∧R)	P ∨ (Q ∧ R) ⇔ (P∨Q) ∧ (P∨R)
Élément neutre	P ∧ V ⇔ P	P ∨ F ⇔ P
Élément absorbant	P ∧ F ⇔ F	P ∨ V ⇔ V